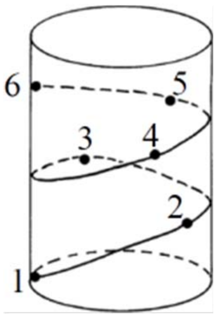
植物に由来するパターン生成・メッシュ生成技術

九州大学　マス・フォア・インダストリ研究所
(Institute of Math for Industry, IMI)
教授　富安　亮子

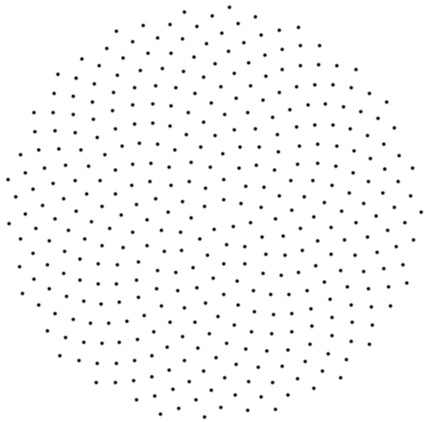
2022年5月20日

1. 発明の目的：パターン生成・メッシュ生成について

- 紹介する新技術は、植物のモデルや、球面の離散化（メッシュ生成）に用いられるフィボナッチ法（黄金角の方法とも）を一般的な曲面や、高次元物体にも適用できるようにしたもの。
- 200年前に茎上の葉の分布（葉序）のモデルとして開発された(左)。円盤に適用するとひまわり頭部の螺旋パターンのモデルになる（右)。



円柱上の葉序モデル



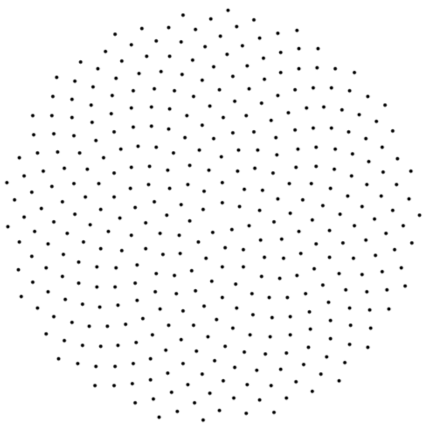
円盤モデル

ひまわりの螺旋パターン

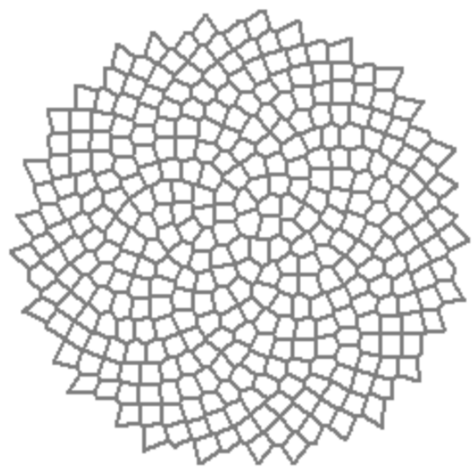
1. 従来技術：(a) フィボナッチ法

- フィボナッチ法の特徴は、得られたパターンで点密度が、密・疎に偏らず一様であること（等面積性と2点間の最小距離で定量化・証明できる）。

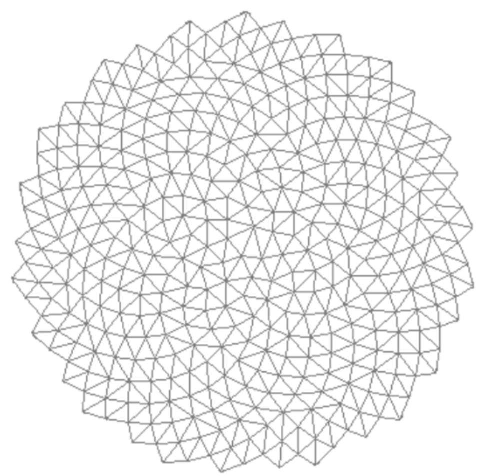
- 点集合からメッシュを生成する代表的な方法にVoronoi図, Delaunay図の方法などがある。得られる各メッシュの大きさがほぼ同じくらいになることが保証される(等面積と呼ばれる性質）。



円盤モデル

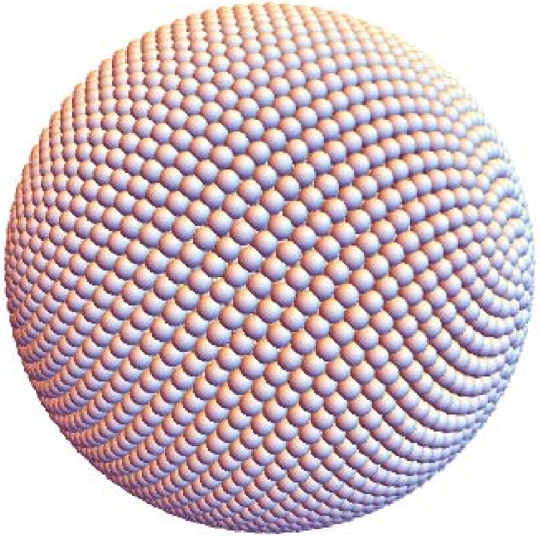


Voronoi図



Delaunay図

- 地球表面（球面）のメッシュ生成にもフィボナッチ法が用いられている:



しかし従来法は回転体表面にしか適用できなかった。

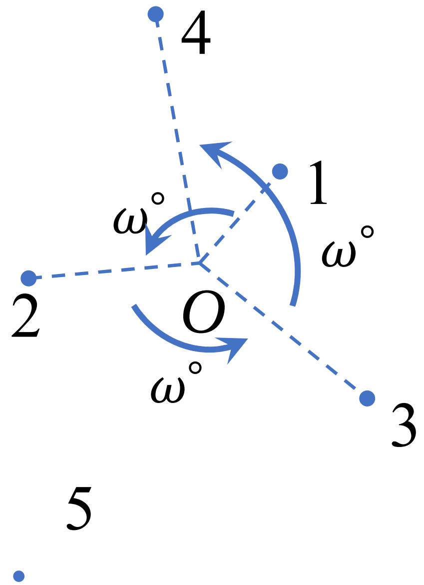
- フィボナッチ法のアルゴリズムを簡単に説明する。

下式で求められる黄金角 ($\omega \approx 137.5°$)と呼ばれる角度を用いる。

$$\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\text{: 黄金数}$$

$\omega = \frac{360°}{1+\gamma} \approx 137.5°$:　360°を$1{:}\gamma$に分割したときの小さい方の角度

(a) 従来のフィボナッチ法のアルゴリズム

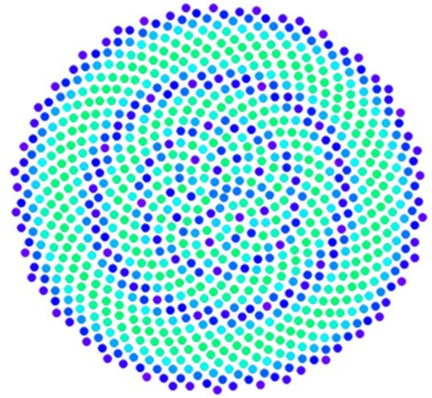


(1) 新しい点は、一つ前の点から黄金角だけ回転した座標に生じる。

(2) 加えて、最初のn個の点がなす図形の面積$=n\times$(定数)、の条件をおく。

得られる点集合の一様性は数学的に保証される。

例) 円盤の場合:



最初のn個の点がなす図形は円(半径rとする)。

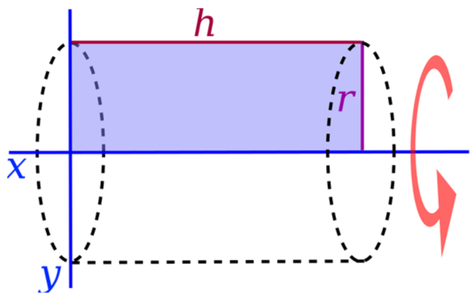
よって、$\pi r^2 = nC$.

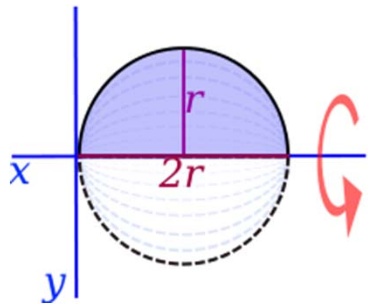
このことからn番目の点の極座標は

$$(r,\theta) = \left(\sqrt{nC/\pi},\, n\omega\right).$$

- アルゴリズムはシンプル・高速だが、上記の考え方だと円盤や回転対称な曲面にしか適用できない。

回転対称な曲面の例・・・円柱面・球面など(回転体の面)

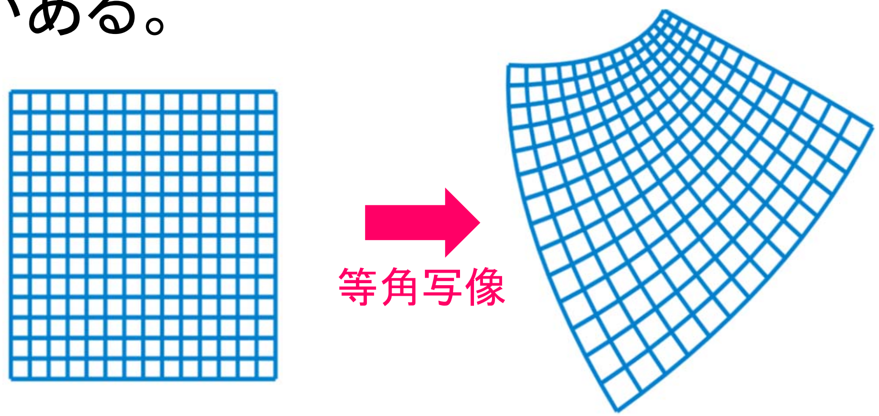




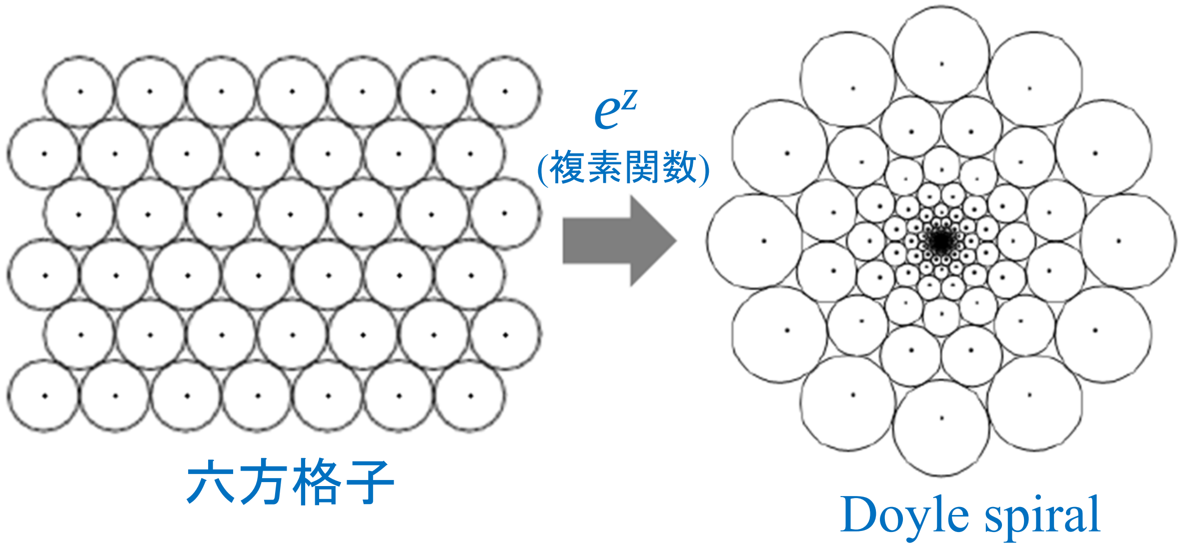
1. 従来技術: (b) 等角写像を用いた方法

- 別の方法に、等角写像を用いる方法がある。

等角写像
= 共形写像(=形を変えない写像,
複素関数論の正則関数)

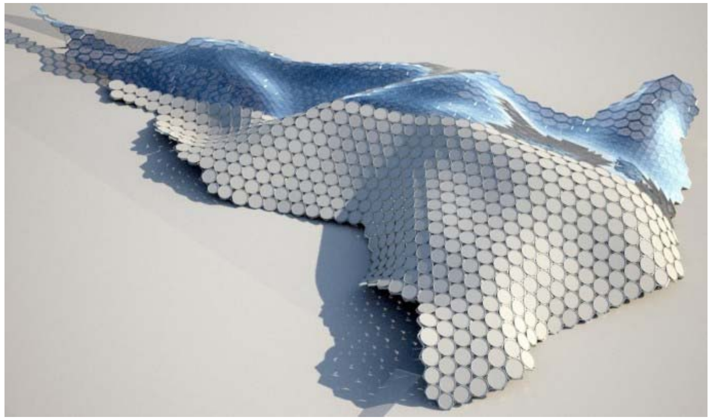


- 等角写像で六方格子を写すことで、様々なパターン・メッシュが得られる。



1. 従来技術: (b) 等角写像を用いた方法

- 等角写像によるメッシュで等面積のものは合同変換写像（回転・反転・平行移動など）限られるので、より等面積性の高いメッシュを得るよう改善するには制約条件を置き最適化処理を行う必要がある。



Wallner & Pottmann, Journal of Mathematics in Industry (2011)

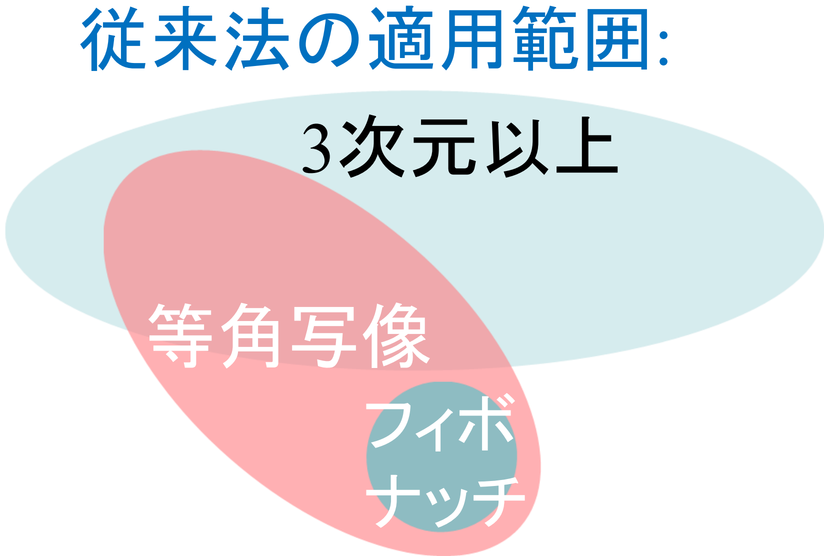
六方格子の写像による構造物の例

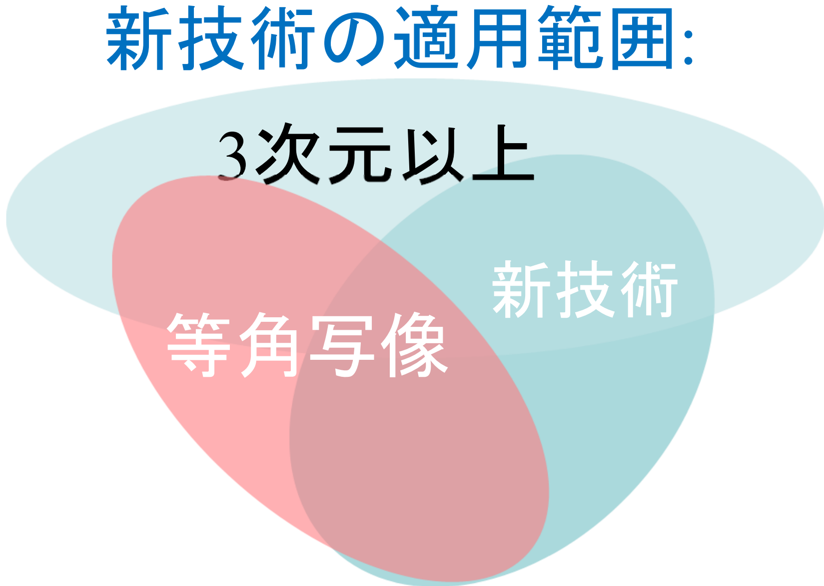
- 新技術は最適化の前から、理論的に質が保証されたメッシュが得られるよう異なる数学によるメッシュ生成を行っている。

2. 新技術の特徴･従来技術との比較

□ 開発した新技術は、フィボナッチ法の以下の性質を満たしたまま適用範囲を大きく改善したものになる。

- ✓ メッシュの等面積性、
- ✓ 高速性
- ✓ 2点（メッシュ・円・球の中心点）の最小距離に対する大きなしきい値



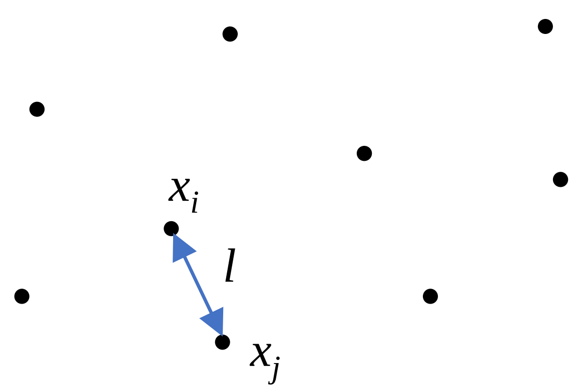


□ 一様性の指標

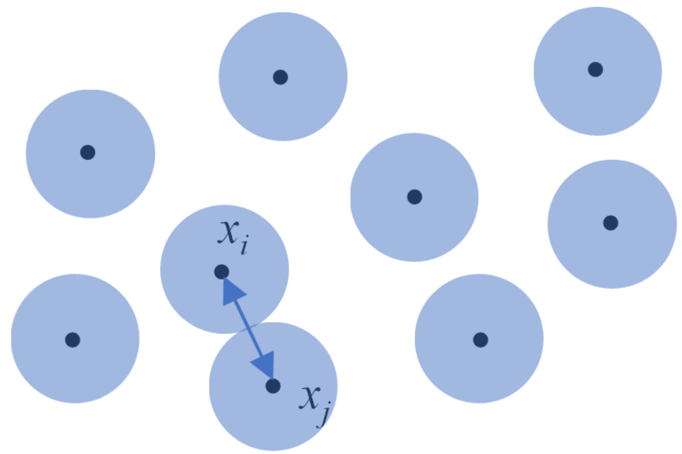
- 提案手法の等面積性は完全に成立する。
- もう一つの指標として、パッキング密度を用いることにする。

ある領域Dに含まれる点集合について、D全体でのパッキング密度を求める場合、以下のようにする。

(i) 任意の2点の最小距離 $l=|x_i - x_j|$とする。



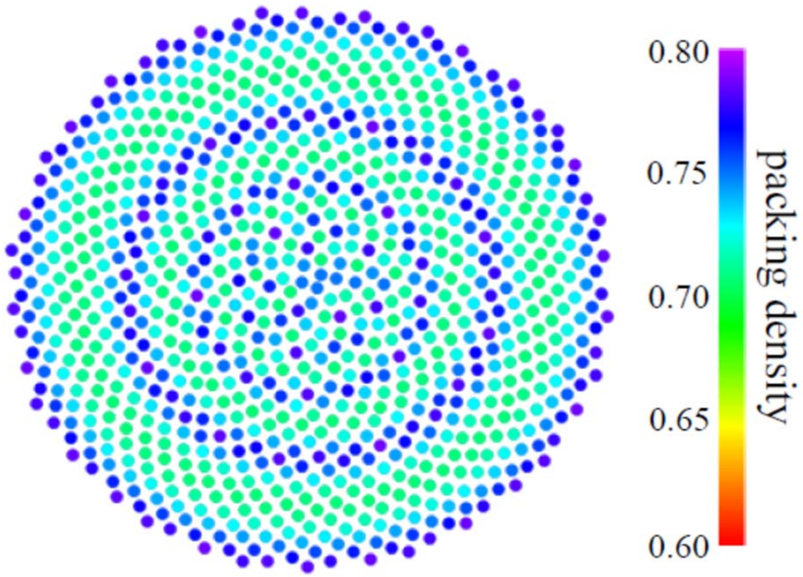
(ii) この場合円の半径を$l/2$とすると各円は重ならない。



パッキング密度=(円の占める面積)/(Dの面積)とする。
この値が大きいほど、点集合から得られるメッシュの一様性が高い。

□ 曲面(2次元)の場合

- 本手法の場合、(凹凸のある曲面でも)パッキング密度0.7--0.8ぐらいの範囲で生成可能(単位面積あたりの点数を増やすと下限値は0.702ぐらいの値に収束する)。



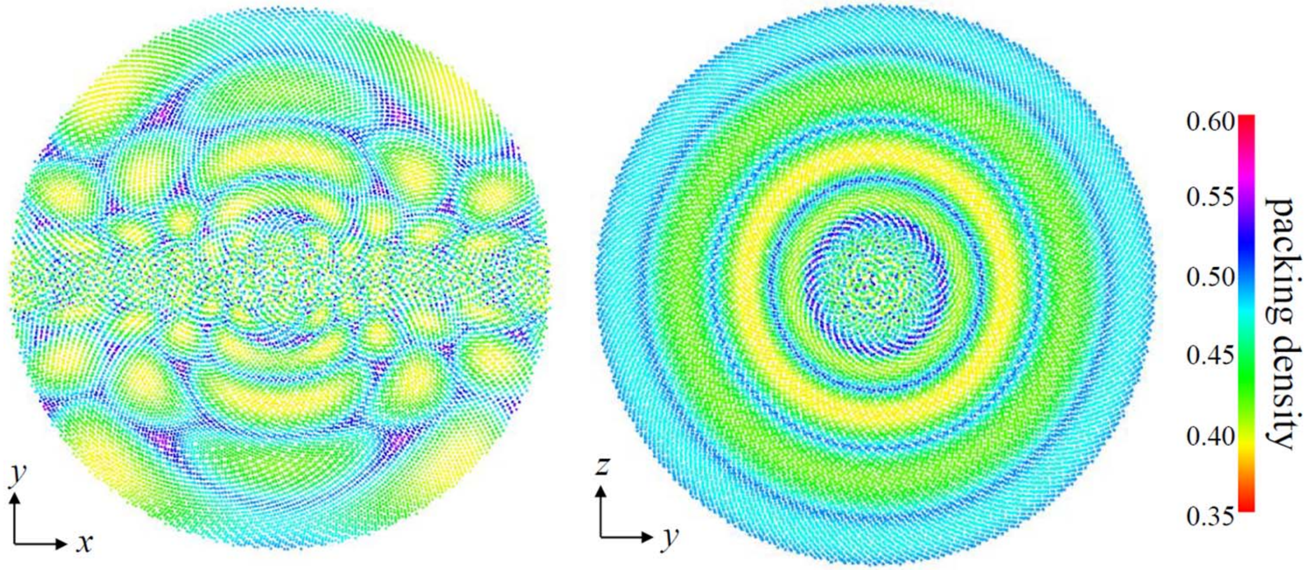
円盤の例(散布図を各点まわりのパッキング密度で採色。他の曲面でも密度は同様)。

比較: 平面のパッキング密度は、平面の六方格子で0.907, 正方格子で0.785.

新技術は曲面や貼合せの自由度に関わらず上記の値になるということ。

ロ ソリッド（3次元）の場合

- 3次元では、パッキング密度0.39—0.55で生成可能（単位面積あたりの点数を増やすと下限値は0.389ぐらいの値に収束）。

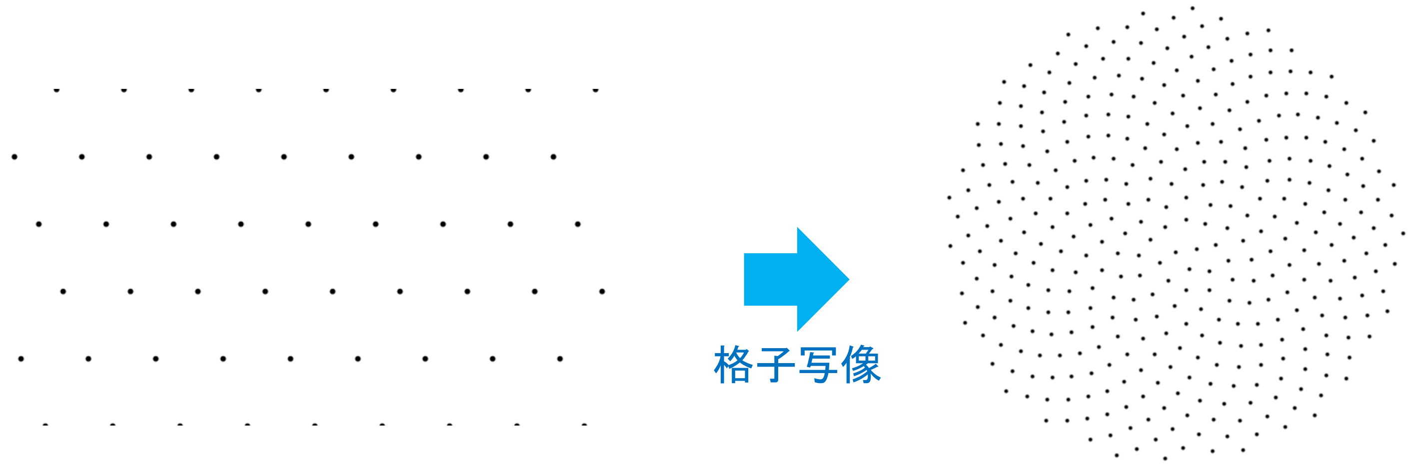


球体の例(断面図。散布図を各点まわりのパッキング密度で採色した。他の3次元物体でも密度は同様。)

比較: 3次元空間のパッキング密度は、面心立方格子・六方細密格子で0.740, 単純立方格子で0.524程度。

ロ 一般化に用いた考え方: 格子 & 格子写像

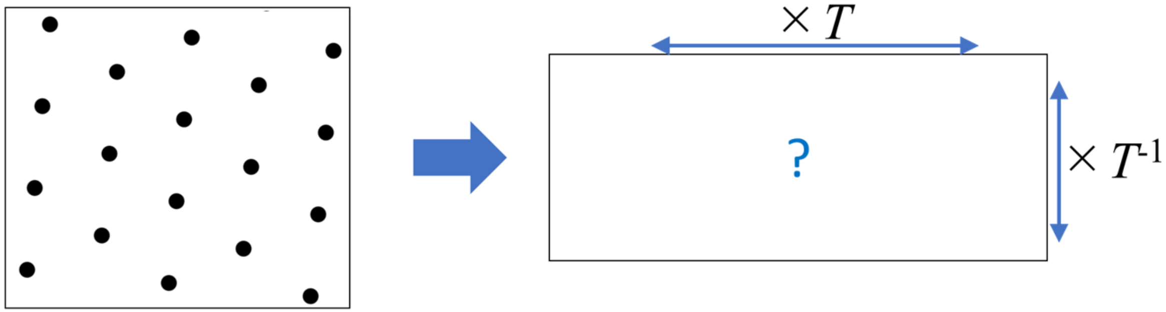
- 等角写像の場合と同様、フィボナッチ法でも、ある性質を満たす写像で格子点を写した結果、右図のような点集合が得られていると解釈できる。



- 点が一様に分布するには、写像する格子は何でもいいわけではなく、できるだけ最適な格子を取ってくる必要がある。
- 格子写像も、等面積性を満たす必要があるが、これは制約条件として弱く、数多く存在する。

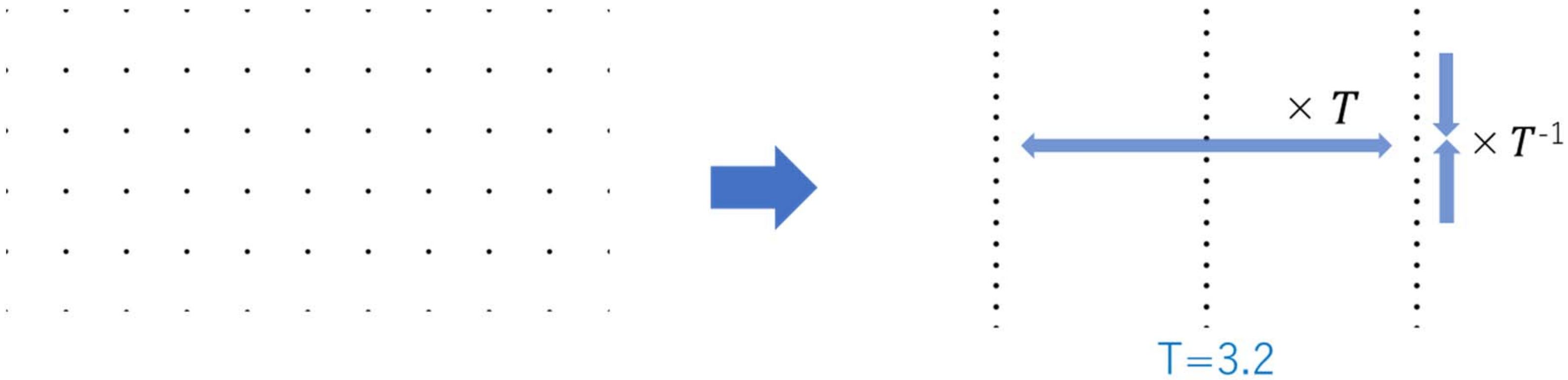
□ フィボナッチ法に用いる格子の特別な性質

- 固定した2軸(x軸, y軸としてよい)方向の面積を保つ伸縮を考える。



- このとき、任意のTに対し、点集合の分布の偏り(密・疎な箇所)が現れない格子はどのようなものかという数学の問題。

左のような正方格子では、右のようになって偏りが生じる。



- 通常フィボナッチ法で用いるのは$m\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\c\end{pmatrix}$ $(m,n$: 整数, c≠0:定数)の形の格子。縦横の伸縮に対し以下のようになる。

T=1　　T=0.3　　T=0.1

- 任意の$T>0$で上記を成立させるには、従来フィボナッチ法で用いられている格子ではなく、以下に置き変えるとよい。

$$m\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\quad(m,n\text{: 整数})$$

- 整数論の知見から、より高次元の格子でも上記の性質を持つ最適な格子を決定し、あらかじめ固定しておくことができる。

□ 一般化に用いる格子写像

- 格子写像fは、各点での線形近似が、垂直な2軸方向への伸縮に一致するよう、ヤコビ行列$J(\mathbf{x})=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$が以下の性質を満たすようにとる。

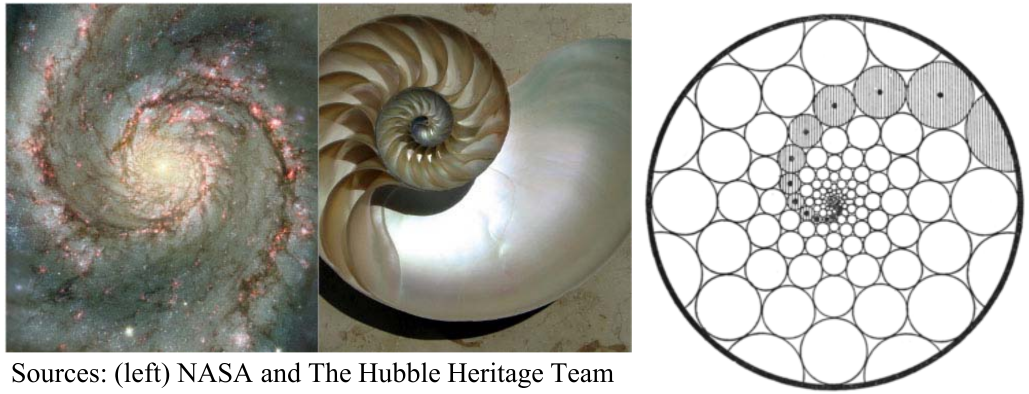
(★) ${}^{T}J(\mathbf{x})\,J(\mathbf{x})$は対角化行列

(★★) $\det({}^{T}J(\mathbf{x})\,J(\mathbf{x}))$=定数

- 格子写像は、メッシュする領域の形によって変わる他、回転・平行移動による任意性もあり選択の余地がある。
偏微分方程式を解く数値計算で求めることができる。

□ 例(対数螺旋)

- 対数螺旋は自然界でしばしば観察されるが、既存のフィボナッチ法で等面積性は維持できない。



Sources: (left) NASA and The Hubble Heritage Team (Wikimedia Commons); (right) Chris 73 (Wikimedia Commons);

自然界の対数螺旋(左)とDoyle spiralの対数螺旋(右)

- 一般化により、対数螺旋を含むパターンも得られるようになった。

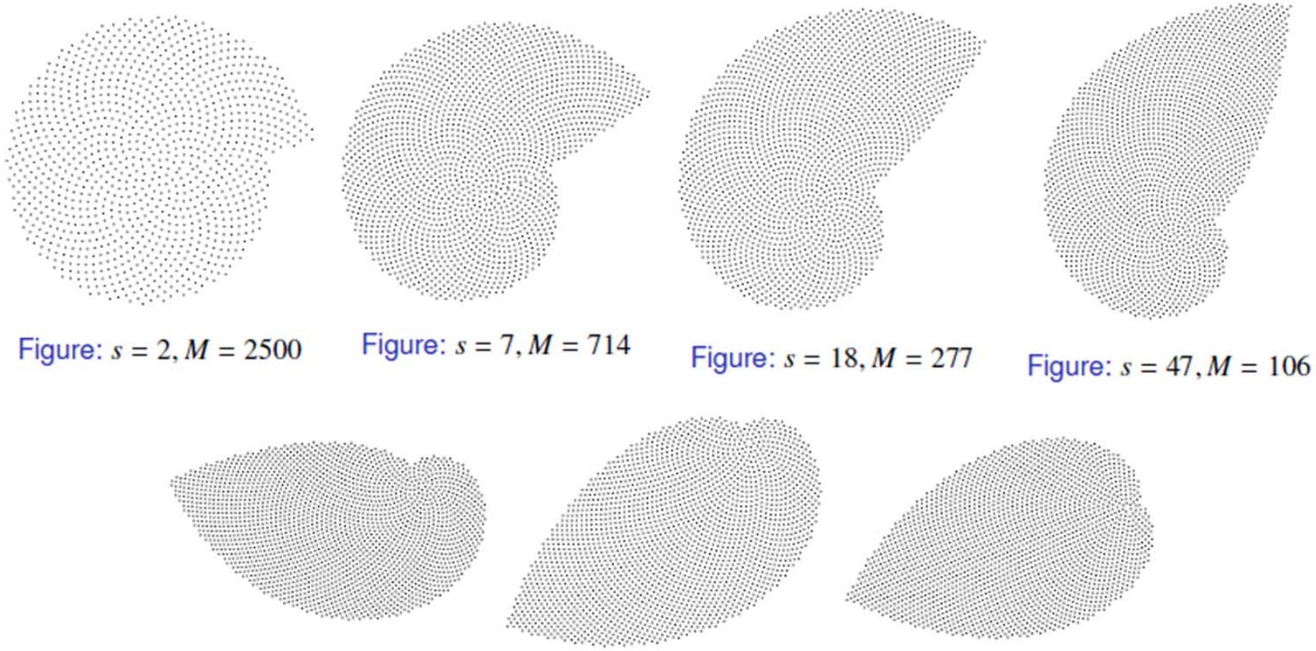


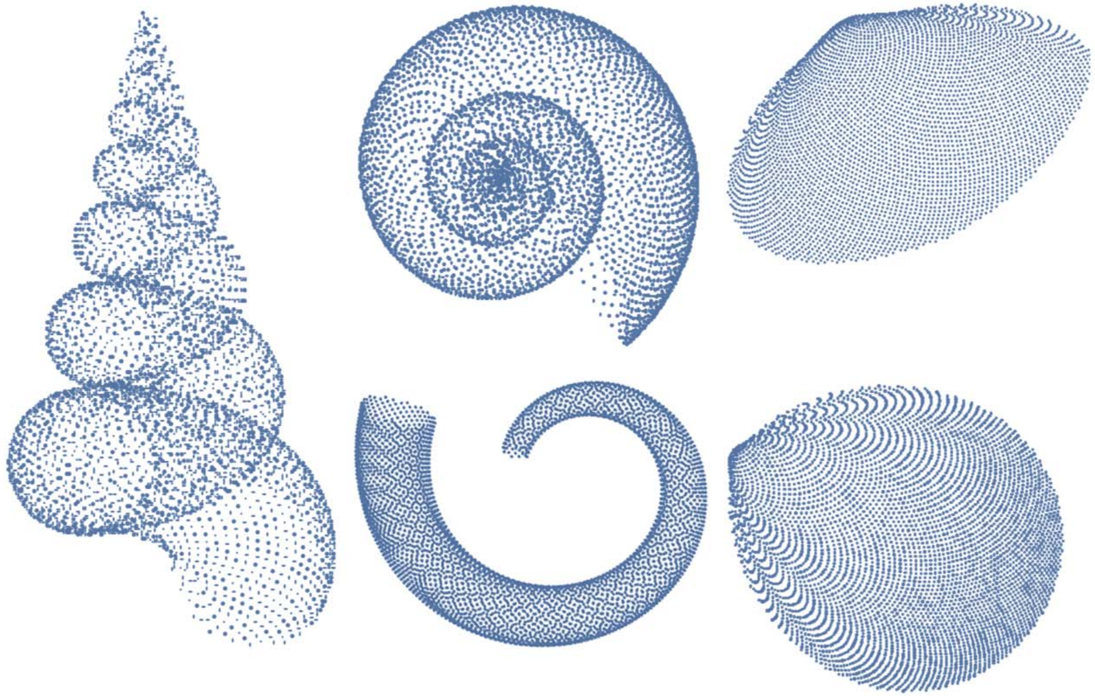
Figure: $s = 2, M = 2500$ Figure: $s = 7, M = 714$ Figure: $s = 18, M = 277$ Figure: $s = 47, M = 106$

Figure: $s = 123, M = 40$ Figure: $s = 323, M = 15$ Figure: $s = 535, M = 9$

対数螺旋を含むパターンの散布図 (s,M: パラメータ. $M \to \infty$とすると点数が増え，最終的に平面全体となる)

ロ 例(対数螺旋パターン, 曲面の例)

- 対数螺旋といえば貝殻曲面が有名である。回転対称性を有しない曲面への適用例として、貝殻曲面への適用例を示す。



回転対称性を有しない曲面への適用例
(Raupモデルによる貝殻曲面)

今後は創発事業で計算の自動化を行い、事例を増やす予定。

□ 想定される用途

1. 等面積かつ密・疎の偏りの少ないメッシュ生成が必要となる数値解析において、本技術で効率よく確実にそのようなメッシュ生成を行うことができる。

2. ひまわりの螺旋パターンと同様(例: 洗濯機の蓋、コースターなど）、工業デザイン・意匠パターンに用いることができる。

3. 上記を目的とした数値計算・CAD・デザインソフトウェアのユーザ補助ツールとして用いることができる。

□ 実用化に向けた課題

- 200年前からあるフィボナッチ法のアルゴリズムが、一様性を保ったまま一般化されたのは今回が初めて。意匠や建築などデザインに用いることができると考えられる。

- メッシュ生成については、曲面・ポリゴン・空間についてどこまでの状況を考慮するか次第で、計算の難易度は変わる。

これまで、曲面を表すパラメータを入力し、曲面上の点集合や、そのVoronoi・Delaunay図を求めるコードを研究目的で開発した。

□ 企業への期待

- 等面積メッシュ（または関連する数値解析・工業デザイン）の需要を持つ、企業との共同研究を希望。
- 意匠・建築デザイン等に関連するアプリ開発に関わる企業に、どのような需要があるかお話をお聞きしたい。

アカデミックには、生物・鉱物の構造研究に応用することを考えていますが、私の所属が数学なので、応用先は広く考えています。

□ 本技術に関する知的財産権

- 発明の名称　:パターン生成方法、パターン生成装置、及びパターン生成プログラム
- 特願2021-103968
- 出願人　:九州大学
- 発明者　:富安　亮子

ロ　産学連携の経歴

- 2017年-2019年　企業Aより奨学金寄付
- 2018年-2021年　JST未来創造事業に採択
- 2019年-2023年　企業Aと共同研究実施
- 2022年-2022年　企業Bより受託研究
- 2022年-2025年　JST創発的研究支援事業に採択

□ お問い合わせ先

九州大学　学術研究・産学官連携本部
　知財・ベンチャー創出Gr　武内　真奈美

ＴＥＬ　092-802-5137
ＦＡＸ　092-802-5145
e-mail　takeuchi@airimaq.kyushu-u.ac.jp